3°/ $OA = |z_A - z_0| = |ia - 0| = |i||a| = |a|$

$OB = |z_B - z_0| = |a|$

Donc $OA = OB$ et par suite OAB est un triangle isocèle de sommet principal O.

Or $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \arg(\frac{z_A - z_0}{z_B - z_0})\ (2\pi)$

$\equiv \arg(\frac{ia}{a})\ (2\pi) \equiv \arg(i)\ (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Conclusion : OAB est un triangle isocèle et rectangle en O.

Solution 20 :

1°/ $1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}})$

$= e^{i\frac{\alpha}{2}}(2\cos\frac{\alpha}{2})$.

Conclusion : $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, on a : $1 + e^{i\alpha} = 2\cos(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}}$

$1 - e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}})$

$= -2i\sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}}$

Conclusion : $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, on a : $1 - e^{i\alpha} = -2i\sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

2°/ a) (*) $z^{2n} + z^n + 1 = 0$. On pose $Z = z^n$ l'équation devient : $Z^2 + Z + 1 = 0$

$\Delta = -3 = (\sqrt{3}\,i)^2$, une racine carrée de Δ est $\delta = \sqrt{3}\,i$.

$Z' = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$, $Z'' = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$

Or $Z = z^n$ donc $z^n = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$ ou $z^n = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$

Donc les solutions de l'équation (*) sont les racines $n^{ième}$ de $Z' = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$ et les racines $n^{ième}$ de $Z'' = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$.

or $Z' = e^{4i\frac{\pi}{3}} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ et $Z'' = e^{2i\frac{\pi}{3}}$; $Z'' = \overline{Z'}$